13.00

الوقت المحاضرة التاسعة ٢م –

الأربعاء ١٠ / ٥ / 2018م — المحاضرة التاسعة ٢م و -

14.00

تمارين الفصل الثالث

15.00

تمرين ص118 نهم

16.00

ص363 تمرين: أوجد حل المعادلة:

$$u_t = u_{xx} + u_x + u + x^2 \quad \dots (1)$$

17.00

والمحقق للشرط الابتدائي

$$u\Big|_{t=0} = x^2 \quad \dots (2)$$

18.00

الحل:

المعادلة في الفضاء الثاني من الحالة كوشي مع الحالة العامة

19.00

$$u(x,t) = e^{\left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)t + \frac{b}{2a^2}x} \cdot v(x,t)$$

20.00

$a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $f(x,t) = x^2$

$$u(x,t) = e^{\frac{3}{4}t - \frac{1}{2}x} \cdot v(x,t) \quad \dots (3)$$

نشتق العلاقة (3) بالنسبة لـ t ونعوض بـ (1) نحصل على

منه نكتب المعادلة الأولى

$$\vartheta_t = \vartheta_{xx} + x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}t} \quad \text{—— (4)}$$

والدالة عند شروط الابتدائية من (2)، (3))

$$x^2 = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \vartheta(x,0) \Rightarrow \vartheta(x,0) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad (5)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\tau)\, d\tau \frac{d\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_2$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)}{4t}} \cdot \xi^2 \cdot e^{\frac{1}{2}\xi} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

$$e^{-\left[\frac{\xi - x}{4t} - \frac{1}{2}\xi\right]} = ?$$

$$\frac{\xi - x}{4t} - \frac{1}{2}\xi = \frac{\xi^2 - 2\xi x + x^2 - 2t\xi}{4t} = \frac{\xi^2 - 2(x+t)\xi + x^2}{4t}$$

$$= \frac{[\xi - (x+t)]^2 - (x+t)^2 + x^2}{4t} = \frac{[\xi - (x+t)]^2 - 2xt - t^2}{4t}$$

$$e^{-\left[(\xi - x)^2 - \frac{1}{2}\xi\right]} = e^{\frac{2xt + t^2}{4t}} e^{-\frac{[\xi - (x+t)]^2}{4t}}$$

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}t} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\frac{[\xi - (x+t)]^2}{4t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} = e^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}t} I_3$$

$$\frac{\xi - (x+t)}{2\sqrt{t}} = z \Rightarrow \xi = 2\sqrt{t}\, z + (x+t)$$

$$\frac{d\xi}{2\sqrt{t}} = dz$$

$\Gamma(1) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(17)

$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3^2} . [2\sqrt{t}\,3 + (x+t)]^2 d3$

$= 4t \int_{-\infty}^{+\infty} 3^2 . e^{-3^2} d3 + 4\sqrt{t}(x+t) \int_{-\infty}^{\infty} 3 . e^{-3^2} d3 + (x+t)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3^2} d3$

$= 0$ $\sqrt{\pi}$

$* \int 3^2 . e^{-3^2} d3 = +2\int_0^{+\infty} 3 . e^{-3^2} (+23 d3)$

$+3^2 = t \rightarrow +23\,d3 = dt \Rightarrow 3 = \sqrt{t}$

$\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} . dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \Gamma(\frac{1}{2})$

$\int_0^{\infty} x^{1-a} e^{-x} dx$

$I_1 = e^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}t} \sqrt{\pi} [2t + (x+t)^2] = e^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}t} . I_3$

$I_2 = \int_0^t e^{-\frac{3}{4}\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(\xi_1 - x)}{e^4(t-\tau)}} . e^{\frac{1}{2}\xi_1} . \xi_1^2 . \frac{d\xi_1}{2\sqrt{(t-\tau)}}$

للحصول على I_2 نبدل بـ I كل t بـ $(t-\tau)$ للحصول على الشكل التالي بـ I_2

$I_2 = \int_0^t e^{-\frac{3}{4}\tau} d\tau . [e^{\frac{1}{2}x} . e^{\frac{1}{4}(t-\tau')} \sqrt{\pi}(2(t-\tau) + (x+t-\tau)^2]$

الحل الكلي

$u(x,t) = 2x - x^2 + 2[(x+t)^2 + t - x] . e^t$

37/41.0

$u_t = 4u_{xx} + 4 - x + 2\sin 2x . \cos x \quad (1) \quad 0 < x < 1 \quad \ldots (1)$

$u|_{t=0} = x \ldots (2)$ الشرط الابتدائي

(18)

$u\big|_{x=0} = 0 \ , \ u\big|_{x=1} = 1$ —— (3)

$u(x,t) = e^{\left[c - \frac{b^2}{4a^2}\right] t - \frac{b}{2a^2} x}$

$a = 1 \ , \ b = 0 \ , \ c = 1$

$f(x,t) = -x + 2\sin 2x . \cos x$

$u(x,t) = e^{t} . v(x,t)$ --- (4)

$v_t = v_{xx} + (-x + 2\sin 2x . \cos x)\, e^{-t}$ —— (5)

والدالة $v(x,t)$ تحقق الشروط الابتدائية الجديد ((4)+(2))

$v(x,0) = x$ --- (6)

والدالة $v(x,t)$ تحقق الشروط الحدية ((4)+(3))

$u(0,t) = 0 \ , \ v(1,t) = e^{-t}$ —— (7)

$: v(x,t) = U_t(x,t) + w(x,t)$

$v(x,t) = x . e^{-t} + w(x,t)$ —— (8)

٣- تقسيم المسائل غير مسألة التوصيل الحراري غير المتجانسة، بشروط حدية معينة.

- الفصل الرابع : -

المعادلات ذات النمط الناقصي

١- حل معادلة لابلاس بطريقة فصل المتغيرات.

$\Delta u = 0$

يمكن تحويل المعادلة لابلاس بواسطة طريقة فصل المتغيرات في حالة المناطق البسيطة (دائرة، مستطيل، ...)

- سنتعرض معادلة لابلاس في الإحداثيات الاسطوانية الكروية ومن ثم مساحات الكروية، المنطقة هي كرة ...

١- حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الاسطوانية

سنوجد حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الاسطوانية في حالة خاصة $u = u(\rho, \varphi)$

سنوجد حل العدد للمعادلة مع الشرط الحدي

$$u\big|_{\rho=a} = f(\varphi)$$

علماً أن a نصف قطر الدائرة.

سوف نعتبر أن f مثلثة للتفاضل وأن الحل $u(M)$ متصل في المنطقة المغلقة وأيضاً سنوجد حل معادلة لابلاس داخل الدائرة وخارجها

معادلة لابلاس في الإحداثيات الاسطوانية هي

$$u = u(\rho, \varphi)$$

التي تأخذ الشكل الآتي:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1)$$

مثال: أوجد حل معادلة لابلاس داخل دائرة نصف قطرها a وخارجها؟

الحل:

سوف نبحث عن الحل الخاص غير الصفري بطريقة التفارق.

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0$$

علماً أن R تابعة لـ ρ فقط

و Φ تابعة لـ φ فقط.

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \quad , \quad \frac{d^2 u}{\partial \varphi^2} = R(\rho) \cdot \Phi''(\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \cdot R'(\rho) \cdot \Phi(\varphi)\right] + \frac{1}{\rho} R(\rho) \cdot \Phi''(\varphi) = 0$$

نقسم طرفي العلاقة على $\Leftarrow \frac{1}{\rho} R(\rho) \cdot \Phi(\rho)$

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left[\rho \cdot R'(\rho)\right]}{\frac{R(\rho)}{\rho}} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda$$

بشرط $\lambda > 0$ علماً أن λ مقدار ثابت.

بالتالي نحصل على معادلتين

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0 \quad (2)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left[\rho \cdot R'(\rho)\right] - \lambda R(\rho) = 0 \quad (3)$$



حل المعادلة (2) هي معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة.

$K^2 + \lambda = 0 \Rightarrow K = \mp\sqrt{\lambda} \cdot i$

$\phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi$

، A و B ثوابت

$u(\rho,\varphi)$ عند تغير φ بمقدار 2π

$u(\rho,\varphi+2\pi) = u(\rho,\varphi)$ سنعاود دورة كاملة نعود للنقطة

ويسمى شرط الدورية

$\phi(\varphi+2\pi) = \phi(\varphi)$

أي أن $\phi(\varphi)$ تعتبر دالة دورية في الزاوية φ بفترة دورية 2π

وهذا يكون ممكن إذا كان: $\sqrt{\lambda} = n$ حيث أن n عدد صحيح

← وبالتالي:

$\phi_n(\varphi) = A_n\cos n$

* ومن جهة أخرى نبحث عن الدالة $R(\rho)$ في الصورة

$R(\rho) = \rho^{M}$; M تعتبر ثابت غير معلوم

وذلك لحل المعادلة (3)

نعوض هذه العلاقة ونبدل في العلاقة (3) فنحصل على

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left[\rho M\cdot\rho^{M-1}\right] - n^2\cdot\rho^{M} = 0$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left[M\rho^{M}\right] - n^2\cdot\rho^{M} = 0 \Rightarrow \rho M^2\rho^{M-1} - n^2\cdot\rho^{M} = 0$$

$$\Rightarrow (M^2 - n^2)\cdot\rho^{M} = 0 \Rightarrow M^2 - n^2 = 0 \Rightarrow M = \mp n$$

← حل المعادلة هو

$R(\rho) = C\cdot\rho^{n} + D\cdot\rho^{-n}$; C ، D ثابتين

* لحل المسألة الداخلية لدائرة مرتفع:

$R(\rho) = C\cdot\rho^{n}$; $D = 0$ يجب أن نضع

٢١

وذلك لأنه وإذا كانت $D \neq 0$ بإهمال الحالة $u = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)$
تؤول إلى اللانهاية عندما $\rho = 0$
ولا تعتبر دالة توافقية داخل الدائرة.
وكذلك للمسألة الخارجية نجد أن $(c=0)$ و $R(\rho) = D\rho^{-n}$
لأن حل المسألة الخارجية يجب أن يكون محدوداً في اللانهاية.
وبالتالي فإن حلول الحالات الخاصة تكتب على الشكل الآتي:
للمسألة الداخلية:

$$u_n(\rho,\varphi) = \rho^{n}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi), \quad \rho \leq a$$

للمسألة الخارجية:

$$u_n(\rho,\varphi) = \rho^{-n}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi), \quad \rho \geq a$$

a نصف قطر الدائرة.
والحل العام للمسألة الداخلية هو:

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n}\cdot(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$$

الحل العام للمسألة الخارجية:

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$$

ملاحظة:
حل معادلة لابلاس في حلقة دائرية $R_1 < \rho < R_2$ المحققة للشروط الحدية الآتية:

$$u\big|_{\rho=R_1} = f_1(\varphi), \quad u\big|_{\rho=R_2} = f_2(\varphi)$$

يعطى بالمتسلسلة التالية:

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^{n} + \frac{C_n}{\rho^{n}}\right)\cdot\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\rho^{n} + \frac{D_n}{\rho^{n}}\right)\sin n\varphi$$

$$+\, a\ln\rho + b$$

حيث A و B و A_n و B_n و C_n ثوابت تحدد من الشروط المرافقة.

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos\theta$ (22)

بعض الامثلة:

أوجد حل معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية

$u = u(\rho, \varphi)$

والمحقق للشرط الحدي: $u(\rho,\varphi)\big|_{\rho=1} = \cos^2\varphi$ —— (1)

داخل دائرة نصف قطرها $R = 1$

الحل: حل معادلة لابلاس في هذه الحالة (داخل دائرة) يعطى بالصيغة

$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n [A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi]$ —— (2)

حيث A_n ، B_n ثوابت تحدد من الشرط الحدي

من (1) و (2) نجد ما يلي:

$\cos^2\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$

أي ان:

$= A_0 + A_1\cos\varphi + B_1\sin\varphi + A_2\cos 2\varphi + B_2\sin 2\varphi$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi = A_0 + A_1\cos\varphi + B_1\sin\varphi + A_2\cos 2\varphi + B_2\sin 2\varphi$

بمقارنة الثوابت نجد ان

$A_0 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$

نعوض في المعادلة (2)

$u(\rho,\varphi) = \rho A_0 + \rho^2 (A_2 \cos 2\varphi + B_2 \sin 2\varphi)$

$= \frac{1}{2} + \frac{\rho^2}{2}\cos 2\varphi$ هو الحل المطلوب

حل السؤال بصورة مستقلة.

مثال 2 - [illegible] 2017 - 2018

أوجد حل معادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانية

داخل دائرة نصف قطرها a

$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$

الحل المسألة الحدودية التالية

أوجد الحل [illegible] المسألة، المحقق للشرط الحدي

$u\big|_{\rho=1} = 4 + 8\cos^3\varphi + \cos\varphi$

مثال 3 - [illegible]

أوجد حل معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية $u = u(\rho,\varphi)$

المحققة $u\big|_{\rho=1} = u_1$, $u\big|_{\rho=2} = u_2$ ① $1 < \rho < 2$

الحل: يعطى بالصيغة

$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^n + \frac{C_n}{\rho^n}\right)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\rho^n + \frac{D_n}{\rho^n}\right)\sin n\varphi + a\ln\rho + b$ —— ②

7.00 $u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + C_n) \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n + D_n) \sin n\varphi + b$ ⇐ من ① و ②

8.00 $u_1 = b \quad --(3)$ وبقية الثوابت صفرية.

9.00 $u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n 2^n + \frac{C_n}{2^n}\right) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n 2^n + \frac{D_n}{2^n}\right) \sin n\varphi + a \ln 2$

10.00 $u_2 = a \ln(2) + b \quad -- (4)$ بالمقارنة نحصل على

من (3) و(4) نحصل على

11.00 $a = \frac{u_2 - u_1}{\ln(2)}$

وبقية الثوابت صفرية (أصفار)

12.00

∴ الحل:

$u(\rho, \varphi) = \frac{u_2 - u_1}{\ln(2)} \ln \rho + u_1$

13.00

انتهت المحاضرة التاسعة م و

14.00

15.00